MATEMÁTICAS DE LAS CIVILIZACIONES ANTIGUAS

Florencia Romano
David Rodríguez
Laura Pascual

INTRODUCCIÓN

Las civilizaciones antiguas que dejaron registros perdurables son Babilonia y Egipto. Durante el cuarto milenio antes de nuestra era, aparecen simultáneamente en ambas civilizaciones, la escritura, el uso de la rueda y los metales, propiciando la necesidad de los números y las figuras geométricas para contar y medir.



Las matemáticas de esta primera etapa son básicamente intuitivas y son impulsadas por necesidades prácticas.

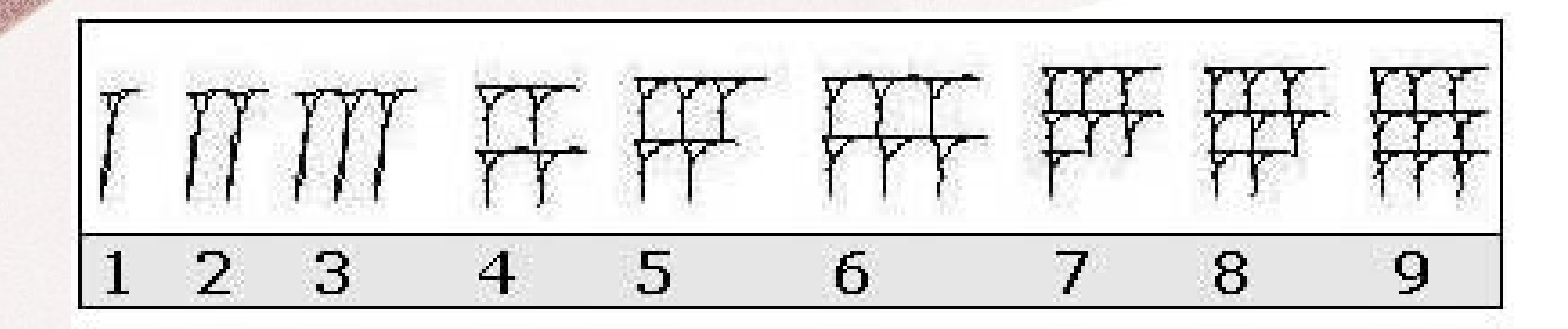
BABILONIA (4500-600 A.C.)

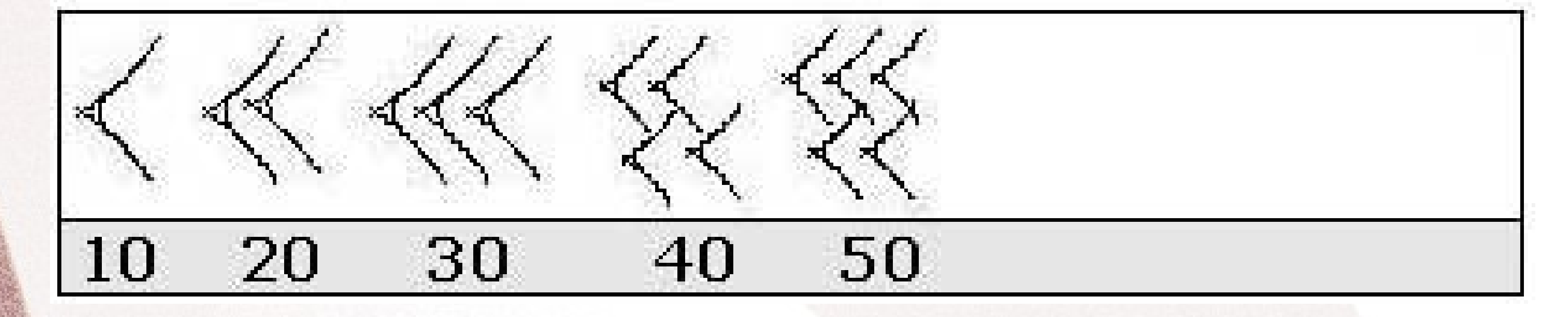
Utilizaban un sistema de numeración posicional de base 60, sin 0; combinado con agrupación simple de base 10 para los numerales necesarios.

Los dos símbolos para los numerales menores que 60 son:



Formas de agrupar:





Desventajas del sistema:

- Dificulta la expresión escrita y las operaciones aritméticas.

ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA

Desde las tabletas más antiguas aparece el sistema posicional sexagesimal y cálculos aritméticos de contabilidades, recibos y sistemas de pesas y medidas.

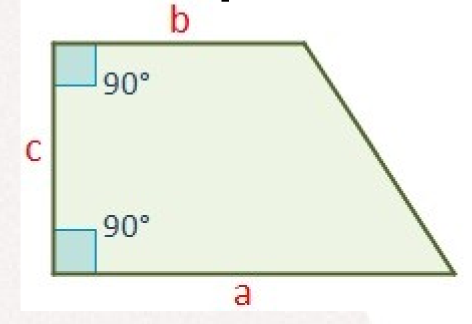


GEOMETRÍA

Utilizaban la siguiente fórmulas:

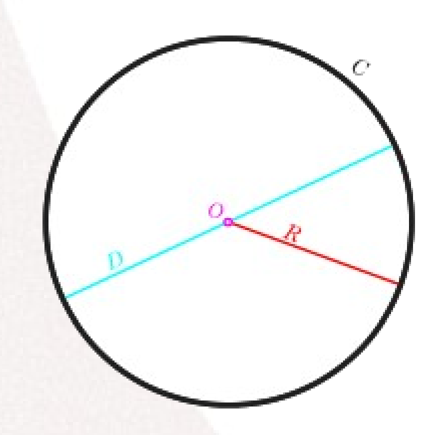
Para calcular el área del trapecio con un lado perpendicular a los lados paralelos:

$$Á=\frac{(a+b)c}{2}$$



Para calcular la circunferencia de diámetro d:

$$C=3d$$



Para calcular el área del círculo de diámetro d:

$$Á=\frac{C^2}{2}$$

Otros hallazgos...

- Volúmenes de pirámides truncadas mal calculadas como la semi-suma de las bases por la altura.
- División de la circunferencia en 360 partes.
- Proporciones de triángulos semejantes.

ÁLGEBRA

Hay una tableta que contiene los cuadrados y los cubos de los números naturales y su suma: n^3+n^2; de $n=1$ a $n=30$.

Esto les permite resolver ecuaciones de la forma $x^3+x^2=b$, con x número natural, desde $b=2$ hasta $b=27900$.



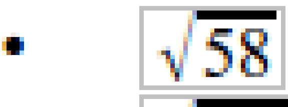

En una tableta de 1600 A.C., en Yale, aparecen aproximaciones de raíces cuadradas que sugieren el uso de la fórmula:

$$(a^2+h)^{(1/2)}=a+(\frac{h}{2})$$

(Primeros dos términos del desarrollo binomial)

Ejercicio

- Calcular, según la fórmula que aparece en la tableta:



TRIGONOMETRÍA

PLIMPTON 322. 1900 A.C.

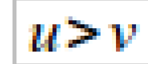
En una tableta de Plimpton, se encontraron 15 ternas pitagóricas, correspondientes a triángulos con ángulos B de 31° a 45°.



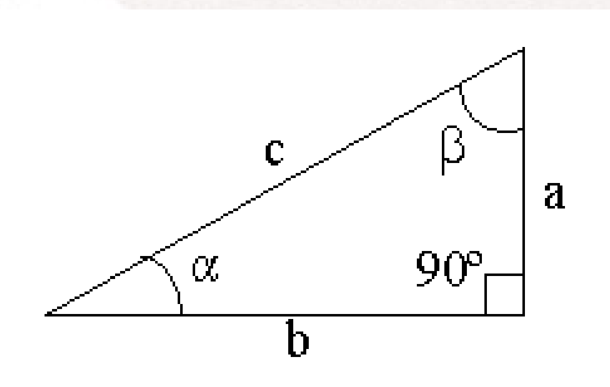
a	b	c		u	v	∠B
120	119	169	1	12	5	45°
3456	3367	4825	2	64	27	44
4800	4601	6649	3	75	32	43
13500	12709	18541	4	125	54	42
72	65	97	5	9	4	41
360	319	481	6	20	9	40
2700	2291	3541	7	54	25	39
960	799	1249	8	32	15	38
600	481	769	9	25	12	37
6480	4961	8161	10	81	40	36
60	45	75	11	2	1	35
2400	1679	2929	12	48	25	34
240	161	289	13	15	8	33
2700	1771	3229	14	50	27	32
90	56	106	15	9	5	31

2000 años después de que los Babilonios hicieran esta tableta, los árabes encontraron una forma paramétrica para las ternas pitagóricas (a,b,c):

$a=2uv$ $b=u^2-v^2$ $c=u^2+v^2$



$\text{con } u, v \in \mathbb{N}$



¿...?

- Esta forma, ¿contiene a todas las ternas pitagóricas?

- Con esta forma paramétrica, ¿se pueden encontrar todas las ternas pitagóricas para todo a,b,c natural?

Terna pitagórica primitiva

- Una terna pitagórica (a,b,c) es primitiva si los números naturales de la terna son primos entre sí.

TEOREMA

Las ternas pitagóricas (a,b,c) de la siguiente forma:

$a = 2uv$ $b = u^2 - v^2$ $c = u^2 + v^2$ $u > v$ $con\ u, v \in \mathbb{N}$

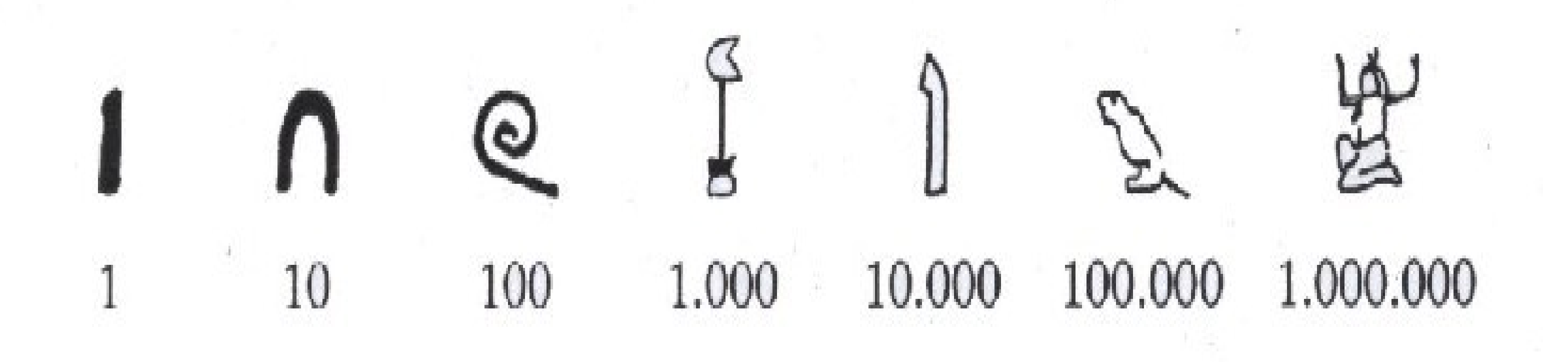
son primitivas sii u y v son primos entre sí y de diferente paridad.

Con excepción de las ternas pitagóricas de las hileras 11 y 15 de la tableta de Plimpton, todas las demás son primitivas.

a	b	c		u	v	∠B
120	119	169	1	12	5	45°
3456	3367	4825	2	64	27	44
4800	4601	6649	3	75	32	43
13500	12709	18541	4	125	54	42
72	65	97	5	9	4	41
360	319	481	6	20	9	40
2700	2291	3541	7	54	25	39
960	799	1249	8	32	15	38
600	481	769	9	25	12	37
6480	4961	8161	10	81	40	36
60	45	75	11	2	1	35
2400	1679	2929	12	48	25	34
240	161	289	13	15	8	33
2700	1771	3229	14	50	27	32
90	56	106	15	9	5	31

EGIPTO
(3500-1000 A.C.)

Utilizaban un sistema de agrupación simple, en base 10, cuyos numerales para las unidades de diferentes órdenes son los siguientes jeroglíficos:



FUENTES DE DATOS

- 3100 A.C.: Escudo Real Egipcio, grabado con números grandes relativos a batallas victoriosas.
- 2900 A.C.: Construcción de la Gran Pirámide de Gizeh con 2.000.000 de bloques colocados en un área aproximada de 5 hectáreas.
- 1850 A.C.:
  - ✓ El Papiro de Moscú de 8cm por 5,44m, con 25 problemas.
  - ✓ El más antiguo sextante para observaciones astronómicas.

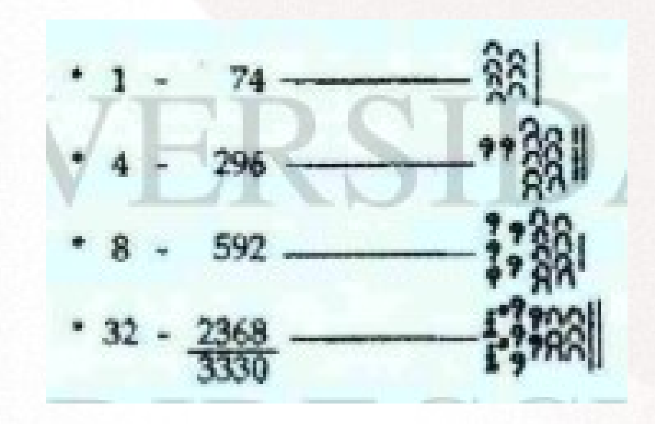
- 1650 A.C.: El Papiro Rhind, especie de manual con 85 problemas.
- 1500 A.C.:
  - ✓ El más grande Obelisco existente, en Tebas, frente al Templo del Sol. Tiene base cuadrada de 3m y una altura de 33m.
  - ✓ El más antiguo sextante para mediciones basadas en los movimientos del Sol.
- 1350 A.C.: El Papiro Rollins, contiene contabilidades sobre fabricación de pan.
- 1167 A.C.: El Papiro Harris, contiene inventarios sobre las riquezas de Egipto y los trabajos realizados por Ramsés III.

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

El carácter aditivo de su sistema de numeración les permitió un algoritmo para multiplicar dos números.

$$(45)_2 = 101101 = 1 + (2)^2 + 1(2)^3 + 1(2)^5 = 1 + 4 + 8 + 32$$

$$(45)74 = (1 + 4 + 8 + 32)74 = 74 + 4(74) + 8(74) + 32(74)$$



Fracciones

- Las fracciones las descomponen en sumas de fracciones unitarias: $\frac{1}{n} = \overset{\bigcirc}{n}$

- Ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

Aplicaciones en su vida cotidiana

- Problemas sobre mezclas para alimento de ganado y almacenamiento de granos, los condujeron a ecuaciones lineales resueltas “por tanteo”.

- Ejemplo:

Para resolver la ecuación $2x - \frac{x}{8} = 60$ se intenta con x=8

$$2(8) - \frac{8}{8} = 16 - 1 = 15 = \frac{1}{4}(60)$$

$x = 4(8) = 32$ resuelve la ecuación $2(32) - \frac{32}{8} = 60$

EJERCICIO

- Resolver “por tanteo” la siguiente ecuación:

$$3x - \frac{x}{5} = 42$$

PAPIRO RHIND



GEOMETRÍA

- Calcularon el área del círculo con la fórmula aproximada:

$$Á = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

EJERCICIO

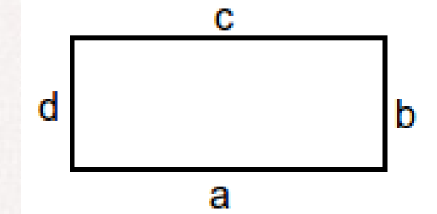
- Hallar el valor de π que resulta de la fórmula anterior.

Cálculo de áreas

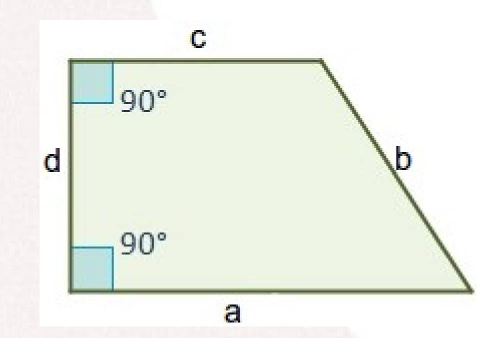
- El área de un cuadrilátero, la calculaban como:

$$\acute{A}=\frac{(a+c)(b+d)}{4}$$

- Correcta para un rectángulo.



- Incorrecta para un trapecio.



Papiro de Moscú

- En el papiro de Moscú, calculaban el volumen de una pirámide truncada con la fórmula correcta:

$$V = \frac{(a^2 + ab + b^2)h}{3}$$

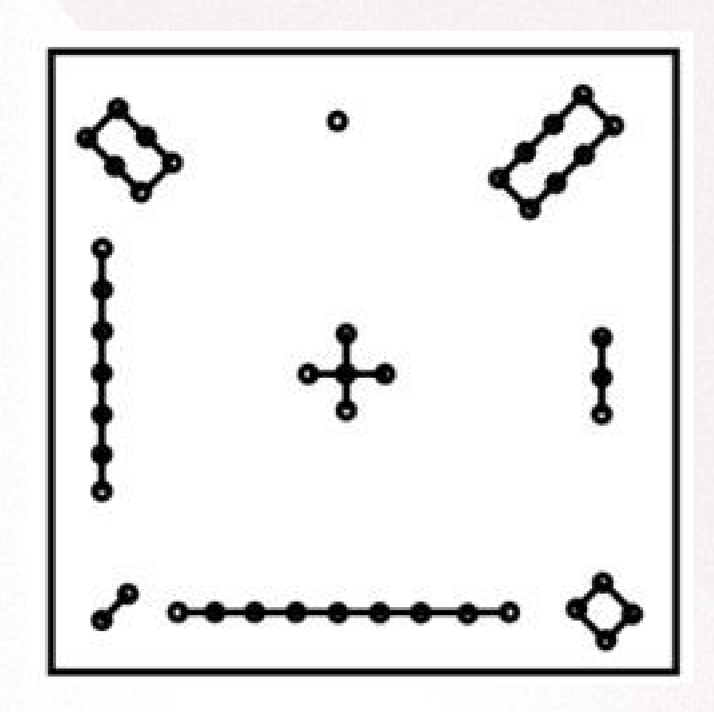
- Esta fórmula la obtuvieron posiblemente por disección de pirámide.

CHINA

Las fuentes originales de la civilización china se perdieron cuando en el año 213 A.C. El Emperador Shi – Huang – Ti ordenó que se quemaran todos los libros para iniciar una nueva civilización.

Cuadros mágicos

El más antiguo cuadro mágico conocido aparece en una figura llamada lo – Shu: Los números del 1 al 9, los pares en las esquinas y el 5 en el centro.



Definiciones:

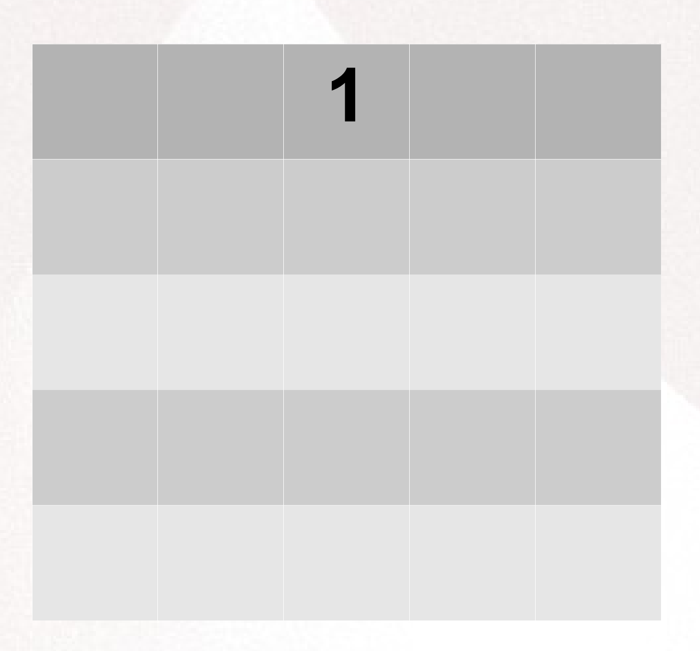
- Un cuadro mágico de orden n es un arreglo en n hileras y n columnas de enteros positivos, tal que la suma de cualquier hilera, columna o diagonal mayor es la misma cantidad.

- Un cuadro mágico de orden n es normal si los números naturales que contiene son los primeros 1, 2, 3, ..., n^2.

¿Cómo construir un cuadro mágico?

El francés De La Louberé encontró un método simple para construir cuadros mágicos de orden impar que consiste en cuatro simples pasos...

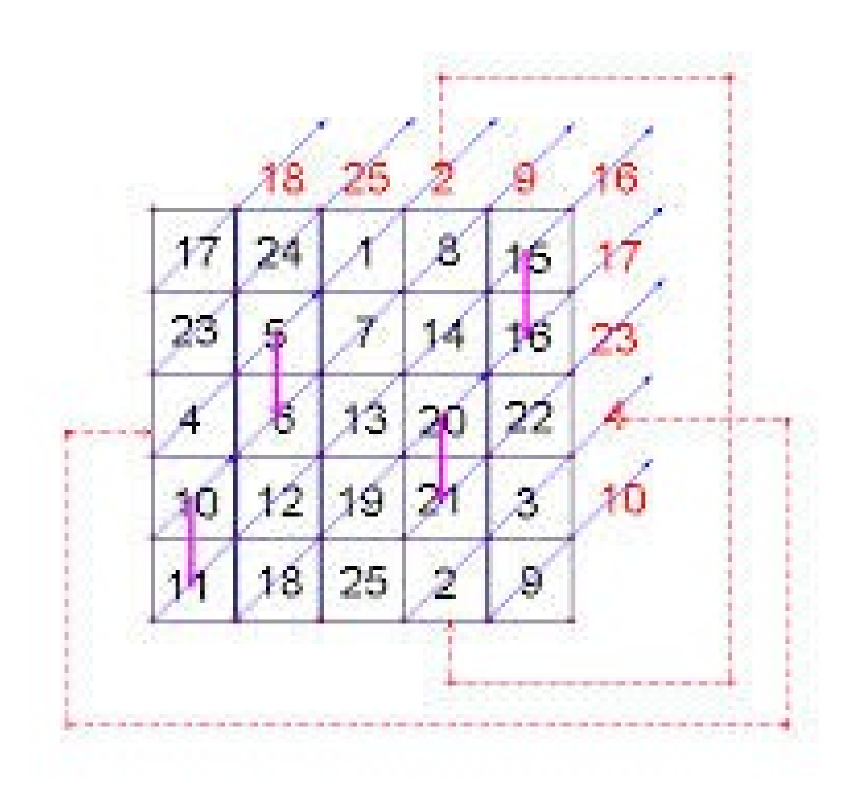
1. Empezar con el 1 en la celda central de la hilera superior. Proceder de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba en diagonal con los números naturales en orden hasta salir del cuadro.



2. Si se sale por arriba, colocar el número que sigue en la celda inferior de la columna inmediata a la derecha, para continuar.

3. Si se sale por la derecha, colocar el número en la primera celda de la hilera inmediata hacia arriba, para continuar.

4. Cuando se encuentre una celda ya ocupada, seguir con la celda inmediata inferior al último número colocado. La esquina superior derecha fuera del cuadro, se considera como una celda ocupada.



Ejercicio:

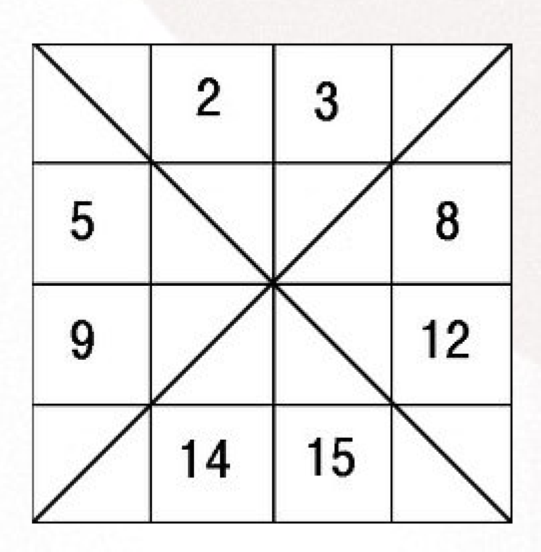
Construir un cuadro mágico normal de orden 7.

Cuadro mágico normal de orden 4n

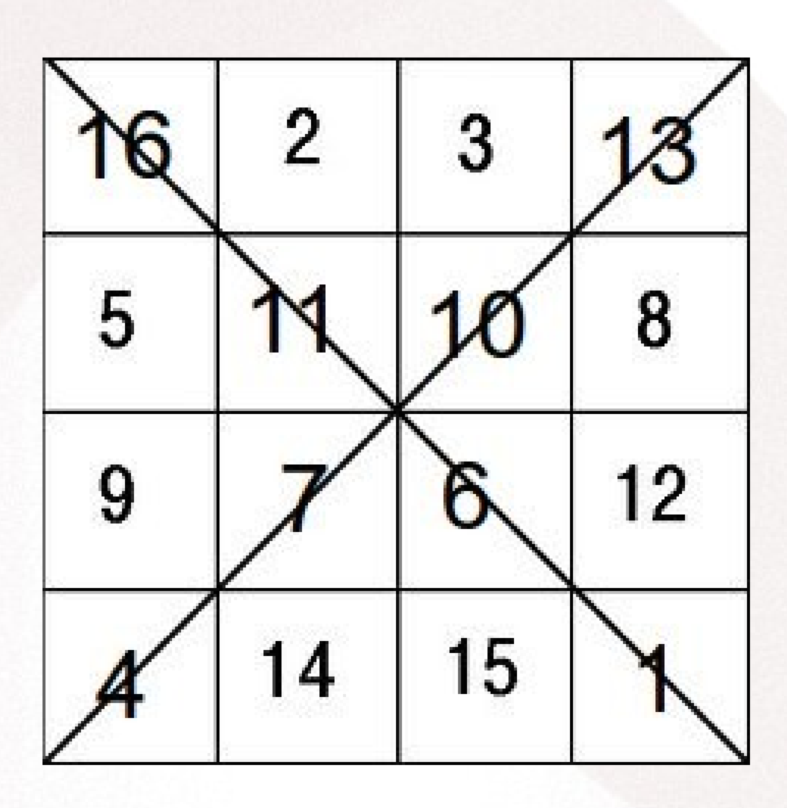
Hay un procedimiento de origen desconocido para elaborar cuadros mágicos normales de orden múltiplo de 4, que consiste en lo siguiente...

1. Cruzar con línea suave todas las diagonales mayores de los bloques de 4x4 celdas diferentes que se forman, de izquierda a derecha y de arriba para abajo.

2. Contar con los números naturales las celdas del cuadro de izquierda a derecha, empezando con la esquina superior izquierda, colocando el número que corresponda en las celdas que no estén cruzadas.



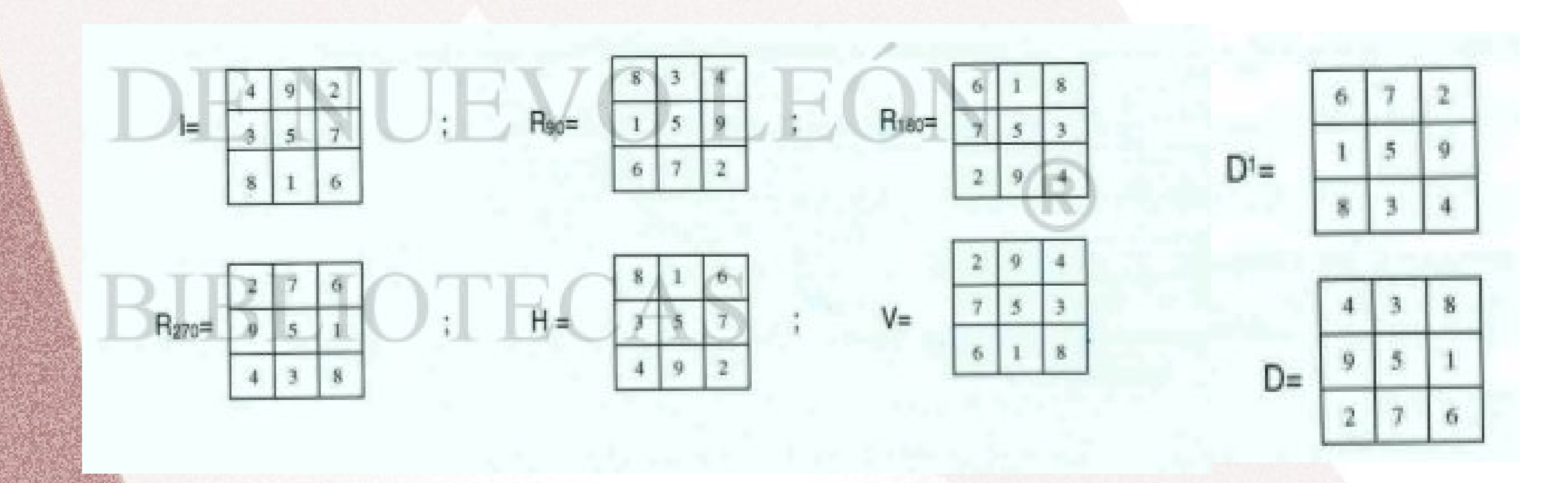
3. Contar con los números naturales, empezando con la celda inferior derecha y en sentido inverso al anterior, colocando el número que le corresponda en las celdas cruzadas.



16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Observación:

Las simetrías del cuadrado, proporcionan 7 nuevos cuadros mágicos normales, a partir de un cuadro mágico normal de orden n.



Ejercicio:

A partir del cuadro mágico de orden 5 del ejemplo, encontrar los 7 cuadros mágicos normales correspondientes a la simetría del cuadrado.

¡Muchas gracias!   :)